Fractions rationnelles

Mettre une fraction du type $\dfrac{\cdots}{(ax+b)(cx+d)}$ sous la forme $\dfrac{\cdots}{ax+b}+\dfrac{\cdots}{cx+d}$

• **Méthode 1** : L'astuce du $+1-1$ ou du $+x-x$ (marche dans peu de cas).

• **Méthode 2** : Chercher les bons numérateurs par tâtonnement : on teste des valeurs simples (1 ou -1), on met au même dénominateur puis on rectifie si besoin.

• **Méthode 3** : Chercher les numérateurs en résolvant un système (aucune astuce, marche toujours mais plus long) : on note α et β les numérateurs, on met au même dénominateur, on identifie les termes en x et les termes constants pour déterminer les valeurs de α et β.

Exemple guidé - Méthode 1

$$\frac{1}{x(1-x)}=\frac{1-x+x}{x(1-x)}=\frac{1-x}{x(1-x)}+\frac{x}{x(1-x)}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}$$

Exemple guidé - Méthode 1

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=??$$

Au brouillon, on teste $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{x+1\ +\ x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x}{(x-1)(x+1)}$

On rectifie le signe : $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{2}{(x-1)(x+1)}$

Il ne reste qu'à tout diviser par 2 : $\dfrac{\frac{1}{2}}{x-1}-\dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}=\dfrac{1}{x^2-1}$.

Ces différentes étapes se font au brouillon ou de tête.
La rédaction finale est :

$$\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}=\frac{\frac{1}{2}(x+1)}{(x-1)(x+1)}-\frac{\frac{1}{2}(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{1}{(x-1)(x+1)}.$$

Exemple guidé - Méthode 3

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)}=??$$

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}=\frac{a(x+2)}{(x-1)(x+2)}+\frac{b(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{(a+b)x+2a-b}{(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x+2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}\Leftrightarrow (a+b)x+2a-b=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\2a-b=1\end{cases}\quad\text{car } 1=0.x\ +\ 1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=-b\\-2b-b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1/3\\b=-1/3\end{cases}$$

Donc $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{\frac{1}{3}}{x-1}-\dfrac{\frac{1}{3}}{x+2}=\dfrac{1}{3(x-1)}+\dfrac{1}{3(x+2)}$

Exercice 1 Ecrire comme somme de deux fractions dont les dénominateurs sont de la forme $ax+b$ (ou $an+b$) :

$\dfrac{1}{n(n+2)}$

$\dfrac{1}{x^2-x}$

$\dfrac{1}{(3-x)(2x+1)}$

$\dfrac{1}{n^2+3n+2}$

$\dfrac{x}{x^2-1}$

Solutions

Exercice 1

- $\dfrac{1}{n(n+2)} =?$

1ère méthode : par tâtonnement

au brouillon, on teste $\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{n+n+2}{n(n+2)}$ puis $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{-2}{n(n+2)}$

Il suffit de diviser par -2

Rédaction : $\dfrac{-\frac{1}{2}}{n}+\dfrac{\frac{1}{2}}{n+2}=\dfrac{-\frac{1}{2}(n+2)+\frac{1}{2}}{n(n+2)}=\dfrac{1}{n(n+2)}$

2ème méthode : via un système

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+2}=\dfrac{a(n+2)+bn}{n(n+2)}=\dfrac{(a+b)n+2a}{n(n+2)}$

Donc $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{a}{n}+\dfrac{b}{n+2}\Leftrightarrow 1=(a+b)n+2a\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\2a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1/2\\a=1/2\end{cases}$

Ainsi, $\dfrac{1}{n(n+2)}=\dfrac{\frac{1}{2}}{n}-\dfrac{\frac{1}{2}}{n+2}$

- $\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{1}{x(x-1)}$

1ère méthode : astuce

$\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{1-x+x}{x(x-1)}=\dfrac{1-x}{x(x-1)}+\dfrac{x}{x(x-1)}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$

2ème méthode : par tâtonnement

Au brouillon, on teste $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1+x}{x(x-1)}$ puis $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{x-1-x}{x(x-1)}$

Il suffit de changer les signes

Rédaction : $\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{-(x-1)+x}{x(x-1)}=\dfrac{1}{x^2-x}$

3ème méthode : via un système

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}=\dfrac{a(x-1)+bx}{x(x-1)}=\dfrac{(a+b)x-a}{x^2-x}$

Donc $\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}\Leftrightarrow 1=(a+b)x-a\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\-a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1\\a=-1\end{cases}$

Ainsi, $\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{-1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$

- $\dfrac{1}{(3-x)(2x+1)} =?$

Par tâtonnement, c'est difficile...

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\dfrac{a}{3-x}+\dfrac{b}{2x+1}=\dfrac{a(2x+1)+b(3-x)}{(3-x)(2x+1)}=\dfrac{(2a-b)x+2a+3b}{(3-x)(2x+1)}$

Donc $\dfrac{1}{(3-x)(2x+1)}=\dfrac{a}{3-x}+\dfrac{b}{2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}2a-b=0\\a+3b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2a\\7a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=2/7\\a=1/7\end{cases}$

Ainsi, $\dfrac{1}{(3-x)(2x+1)}=\dfrac{\frac{2}{7}}{3-x}+\dfrac{\frac{1}{7}}{2x+1}=\dfrac{2}{7(3-x)}+\dfrac{1}{7(2x+1)}$

- $\dfrac{1}{n^2+3n+2}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ car -1 est une racine évidente

1ère méthode : par tâtonnement

Au brouillon, on teste $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{(n+2)+(n+1)}{(n+1)(n+2)}$ puis $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

Rédaction : $\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}=\dfrac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

2ème méthode : via un système

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\dfrac{a}{n+1}+\dfrac{b}{n+2}=\dfrac{a(n+2)+b(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{(a+b)n+2a+b}{n^2+3n+2}$

Donc $\dfrac{1}{n^2+3n+2)}=\dfrac{a}{n+1}+\dfrac{b}{n+2}\Leftrightarrow(a+b)n+2a+b=1\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=0\\2a+b=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}b=-a\\a=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=-1\\a=1\end{cases}$

Ainsi, $\dfrac{1}{n^2+3n+2}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

- $\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$

1ère méthode : par tâtonnement

$\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{(x+1)+(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{2x}{(x^2-1)}$ donc $\dfrac{x}{x^2-1}=\dfrac{1/2}{x-1}+\dfrac{1/2}{x+1}$

2ème méthode : via un système

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. $\dfrac{a}{x-1}+\dfrac{b}{x+1}=\dfrac{a(x+1)+b(x-1))}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{(a+b)x+a-b}{x^2-1}$

$\dfrac{x}{x^2-1)}=\dfrac{a}{x-+1}+\dfrac{b}{x+1}\Leftrightarrow(a+b)x+a-b=x\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=1\\a-b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2b=1\\a=b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=1/\\a=1/\end{cases}$

Ainsi, $\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1/2}{x-1}+\dfrac{1}{x+1}$